ESTABILIZAÇÃO INDIRETA DE UM SISTEMA ACOPLADO COM EFEITOS DE MEMÓRIA

GUILHERME FELIPE TYSZKA

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo analisar as propriedades assintóticas do seguinte sistema abstrato

$$\rho_1 u_{tt} + \beta_1 A u - \int_0^\infty g(s) A^\theta u(t-s) ds + \alpha v_t = 0,$$
$$\rho_2 v_{tt} + \beta_2 A v - \alpha u_t = 0,$$

satisfazendo as condições iniciais

$$u(0) = u_0,\ v(0) = v_0,\ u_t(0) = u_1,\ v_t(0) = v_1, u(-s) = \phi_0(s), s > 0.$$

Neste sistema conservativo-dissipativo, A denota um operador linear definido num espaço de Hilbert $\mathbb{H}$ que é positivo, auto-adjunto e tem inversa compacta. As densidades de massa e os coeficientes de elasticidade $\rho_1, \rho_2, \beta_1, \beta_2$ são positivos e a constante de acoplamento α é um número real não nulo. O expoente θ é um número real no intervalo $[0, 1]$ e o núcleo de memória g é uma função não negativa, decrescente e de classe C^1 tal que

$$\int_0^\infty g(s)\ ds < \beta_1 \alpha_1^{1-\theta},$$

onde α_1 é o primeiro autovalor do operador A. Assumamos também que

$$g(0) > 0 \quad \text{e} \quad g'(t) \leq -\gamma g(t),$$

onde γ é uma constante positiva.

Quando A é o operador Laplaciano negativo, $A = -\Delta$, o sistema acima modela duas ondas elásticas com velocidades de propagações $\sqrt{\frac{\beta_1}{\rho_1}}$ e $\sqrt{\frac{\beta_2}{\rho_2}}$.

A diferença de propagações de ondas

$$\chi_0 = \frac{\beta_1}{\rho_1} - \frac{\beta_2}{\rho_2},$$

tem grande importância no estudo assintótico do sistema acima. De fato, utilizando técnicas da teoria de semigrupos obtivemos as seguintes taxas de decaímento

(1) Se $\chi_0 \neq 0$ e $\theta \in [0, 1]$ então as soluções decaem polinomialmente ao menos com a taxa

$$t^{-\frac{1}{4-2\theta}};$$

(2) Se $\chi_0 = 0$ e $\theta \in [0, 1)$ então as soluções decaem polinomialmente ao menos com a taxa

$$t^{-\frac{1}{2-2\theta}};$$

(3) Se $\chi_0 = 0$ e $\theta = 1$ então as soluçòes deacem exponencialmente.

Também provamos que as taxas polinomiais são ótimas.

Este trabalho foi realizado em colaboração com o Dr. Higidio Portillo Oquendo.

Referências

[1] F. Alabau, Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés. [Indirect boundary stabilization of weakly coupled systems] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999), 1015-1020.

[2] F. Alabau-Boussouira, Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems. SIAM J. Control Optim. 41 (2002), 511-541.

[3] F. Alabau-Boussouira, Z. Wang and L. Yu, A one-step optimal energy decay formula for indirectly nonlinearly damped hyperbolic systems coupled by velocities. ESAIM Control Optim. Calc. Var. 23 (2017), 721-749.

[4] R.G.C. Almeida and M.L. Santos, Lack of exponential decay of a coupled system of wave equations with memory. Nonlinear Anal. Real World Appl. 12 (2011), 1023-1032.

[5] J.J Bae, On uniform decay of coupled wave equation of Kirchhoff type subject to memory condition on the boundary. Nonlinear Anal. 61 (2005), 351-372.

[6] A. Borichev and Y. Tomilov, Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. Math. Ann. 347 (2010), 455-478.

[7] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti and A. Guesmia, Weak stability for coupled wave and/or Petrovsky systems with complementary frictional damping and infinite memory. J. Differential Equations 259 (2015), 7540-7577.

Universidade Federal do Paraná
Email address: guilhermetyszka@hotmail.com