

UMA RELAÇÃO ENTRE AS CONSTANTES ÓTIMAS DAS DESIGUALDADES DE GAGLIARDO-NIRENBERG RIEMANNIANA E EUCLIDEANA

JULIANO DAMIÃO BITTENCOURT DE GODOI

RESUMO

A Desigualdade Ótima de Gagliardo-Nirenberg Euclideana garante que, para todo u em $\mathcal{D}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^r dx \right)^{\frac{p}{r\theta}} \leq A(p, q, r) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx \right)^{\frac{p(1-\theta)}{\theta q}},$$

onde $1 < p < n$, $1 \leq q < r < p^*$, $\theta = \frac{np(r-p)}{r(q(p-n) + np)} \in (0, 1)$ e $A(p, q, r)$ é a melhor constante nessa desigualdade.

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana sem fronteira de dimensão $n \geq 2$, então sabe-se que a seguinte desigualdade, conhecida como Desigualdade L^p -Gagliardo-Nirenberg Riemanniana é válida em $H^{1,p}(M)$

$$\left(\int_M |u|^r dv_g \right)^{\frac{\tau}{r\theta}} \leq \left(\mathcal{A}(p, q, r) \left(\int_M |\nabla_g u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} + \mathcal{B}(p, q, r) \left(\int_M |u|^p dv_g \right)^{\frac{\tau}{p}} \right) \left(\int_M |u|^q dv_g \right)^{\frac{\tau(1-\theta)}{\theta q}}$$

sendo $\mathcal{A}(p, q, r)$ e $\mathcal{B}(p, q, r)$ a primeira e segunda constantes ótimas, respectivamente, da desigualdade acima, com $2 < p < r < p^*$ e $\tau = 1$ ou $2 < r \leq p < p^*$ e $1 \leq \tau \leq \min\{p, 2\}$.

Caso $2 < p < r < p^*$ e $\tau = 1$, tem-se que $\mathcal{A}(p, q, r) = A(p, q, r)$. Neste trabalho, provamos que $\mathcal{A}(p, q, r)^{\frac{p}{\tau}} = A(p, q, r)$, caso $2 < r \leq p < p^*$ e $1 \leq \tau \leq \min\{p, 2\}$. Utilizando tal igualdade para o caso $p = 2$, obtemos uma condição suficiente para que a última desigualdade tenha uma função extremal.

Este trabalho foi realizado em colaboração com os professores Jurandir Ceccon e Carlos Eduardo Durán, com apoio financeiro da CAPES.

REFERÊNCIAS

- [1] J. CECCON E C. DURÁN, *Sharp constant in Riemannian L^p -Gagliardo-Nirenberg inequalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 433 (2016), 260-281.
- [2] Z. DJADLI E O. DRUET, *Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds*, Calculus of Variations and PDEs, 12 (2001), 59-84.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
E-mail address: jdamiao7@yahoo.com.br