Relações de Nordhaus-Gaddum

Carla Oliveira
Escola Nacional de Ciências Estatísticas (ENCE/IBGE)

Workshop - Teoria Espectral de Grafos
Verão 2021 - PPGM/UFPR

- Em 1956, Edward A. Nordhaus (1912 -1998) e Jerry W. Gaddum (1924 -1964) estudaram o número cromático de um grafo G juntamente com o número cromático de seu grafo complementar $\overline{G}$ e obtiveram cotas inferiores e superiores para a soma e o produto deste invariante em função do número de vértices.

Teorema 1.1 (NG56)

Seja G um grafo de ordem n. Então

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$$

e

$$n \leq \chi(G)\chi(\overline{G}) \leq \frac{(n+1)^2}{4}.$$

- Desde então, qualquer inequação para a soma ou produto de um invariante de um grafo e o mesmo invariante em seu grafo complementar passou a ser denominada por relação de Nordhaus-Gaddum.

- Assim, uma relação do tipo Nordhaus-Gaddum pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\theta_1(G) \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq \theta_2(G)$$

ou

$$\beta_1(G) \leq \gamma(G)\gamma(\overline{G}) \leq \beta_2(G),$$

onde $\gamma(G)$ é um invariante de G e $\theta_1, \theta_2, \beta_1, \beta_2$ são funções dadas em termos da ordem e/ou outro invariante de G.

Definição 2.1

Seja $G = G(V, E)$ um grafo com n vértices. A **matriz de adjacência** $A(G)$ *de G é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas são*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & se \ \{v_i, v_j\} \in E \text{ para } v_i, \ v_j \in \ V; \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Definição 2.2

Seja $D(G)$ *a* **matriz diagonal dos graus** *dos vértices de um grafo* G *(ou seja, a matriz* $D(G)$ *é tal que* $D_{ii} = d(v_i)$*) e seja* $A(G)$ *a matriz de adjacência de* G *.*

1. *A matriz*
$$L(G) = D(G) - A(G)$$
é denominada **matriz laplaciana** *do grafo* G*.*
2. *A matriz*
$$Q(G) = D(G) + A(G)$$
é denominada **matriz laplaciana sem sinal** *do grafo* G*.*

Em 2017, Nikiforov definiu uma combinação linear convexa, $A_\alpha(G)$, de $A(G)$ e $D(G)$ da seguinte maneira:

Definição 2.3

$$A_\alpha(G) = \alpha D(G) + (1-\alpha)A(G), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

- $\alpha = 0$, $A_0(G) = A(G)$
- $\alpha = 1$, $A_0(G) = D(G)$
- $\alpha = \frac{1}{2}$, $A_{\frac{1}{2}}(G) = \frac{1}{2}Q(G)$

- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n$, autovalores $A(G)$.
- $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_{n-1} \geq \mu_n = 0$, autovalores de $L(G)$.
- $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_{n-1} \geq q_n$, autovalores de $Q(G)$.
- $\lambda_1(A_\alpha(G)) \geq \lambda_2(A_\alpha(G)) \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}(A_\alpha(G)) \geq \lambda_n(A_\alpha(G))$, autovalores de $A_\alpha(G)$.

Definição 2.4

Um invariante espectral é um parâmetro do grafo definido usando os autovalores de uma ou mais matrizes associadas ao grafo.

O primeiro resultado conhecido por relações de Nordhaus-Gaddum para invariantes espectrais foi estabelecido, independentemente, por Nosal em 1970 [No70] e Amin e Hakimi em 1972 [AH72].

Teorema 3.1

Seja G um grafo de ordem n. Então

$$n - 1 \leq \lambda_1(G) + \lambda_1(\overline{G}) \leq \sqrt{2}(n-1).$$

- Nikiforov [Ni07; Ni15] e Nikiforov e Yuan [NY14] estudaram as relações Nordhaus-Gaddum para a matriz $A(G)$ de forma geral, a partir do seguinte problema:

$$f_k(n) = máx_{|V(G)|=n} \; |\lambda_k(G)| + |\lambda_k(\overline{G})|,$$

para um dado inteiro k, onde $1 \leq k \leq n$.

Teorema 3.2 (Ni07;Te11)

Seja G um grafo de ordem n. Então

$$\frac{4n}{3} - 2 \leq f_1(n) \leq \frac{4n}{3} - 1.$$

Teorema 3.3 (NY14)

Seja G um grafo de ordem $n \geq 15(s-1)$ onde $s \geq 2$. Então

$$|\lambda_s(G)| + |\lambda_s(\overline{G})| \leq \frac{n}{\sqrt{2(s-1)}} - 1.$$

Teorema 3.4 (NY14)

Seja G um grafo de ordem $n \geq 4^s$ onde $s \geq 1$. Então

$$|\lambda_{n-s+1}(G)| + |\lambda_{n-s+1}(\overline{G})| \leq \frac{n}{\sqrt{2s}} + 1.$$

- Cotas para $q_1(G) + q_1(\overline{G})$

Anderson e Morley [AM85] mostraram que $q_1(G) \leq 2\Delta(G)$ o que implica facilmente na cota superior de Nordhaus-Gaddum mais simples, apresentada por Liu $et.al.$ [LLT04] .

Teorema 3.5 (LLT04)

Seja G um grafo de ordem n com grau máximo $\Delta(G)$ e grau mínimo $\delta(G)$. Então

$$q_1(G) + q_1(\overline{G}) \leq 2(n-1) + 2(\Delta(G) - \delta(G)),$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, G é regular.

Gutman $et.al.$ [GKMZ09] demonstraram uma cota inferior envolvendo apenas a ordem do grafo.

Teorema 3.6 (GKMZ09)

Seja G um grafo simples de ordem n. Então

$$q_1(G) + q_1(\overline{G}) \geq 2n - 2.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G é um grafo regular.

Em 2013, Aouchiche e Hansen [AH13] conjecturaram que

$$q_1(G) + q_1(\overline{G}) \leq 3n - 4.$$

Este resultado foi provado por Ashraf e Tayfeh-Rezaie em 2014 [AT14]. Neste mesmo artigo os autores apresentaram uma nova cota superior e provaram que esta cota é melhor do que a anterior.

Teorema 3.7 (AT14)

Seja G um grafo com $n \geq 2$ vértices. Então

$$q_1(G) + q_1(\overline{G}) \leq 2n - 2 + (\Delta - \delta)\left(2 - \frac{\Delta - \delta + 1}{n - 1}\right).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G é regular ou $G \simeq K_{1,n-1}$.

- Cotas para $q_1(G)q_1(\overline{G})$

As desigualdades de Nordhaus-Gaddum para o produto dos maiores autovalores são raras. Em 2013 Aouchiche e Hansen [AH13] propuseram a seguinte conjectura:

Conjectura 3.1 (AH13)

Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Então

$$q_1(G)q_1(\overline{G}) \leq 2n(n-2)$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, $G \simeq K_{1,n-1}$.

No entanto, Ashraf e Tayfeh-Rezaie [AT14] refutaram esta conjectura em 2014.

- Cotas para $q_2(G) + q_2(\overline{G})$

Em 2019, Huang e Li [HL19] mostraram as seguintes cotas:

Teorema 3.8 (HL19)

Seja G um grafo de ordem n. Então

$$n - 2 \leq q_2(G) + q_2(\overline{G}) \leq 2n - 4,$$

com igualdade do lado esquerdo se, e somente se $G \in \{K_n, K_{1,n-1}, K_n - e\}$ e com igualdade do lado direito se, e somente se $G \in \{K_2, P_4, C_4\}$.

Teorema 3.9 (HL19)

Se G não é conexo ou bipartido então

$$q_2(G) + q_2(\overline{G}) \leq 2n - 5.$$

- Cotas para $\lambda_2(A_\alpha(G)) + \lambda_2(A_\alpha(\overline{G}))$

Em 2020, Chen $et.al$ [CLM20] mostraram as cotas a seguir para $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

Teorema 3.10 (CLM20)

Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$ e $G \notin \{K_n, K_{1,n-1}, K_n - e\}$. Então

$$\lambda_2(A_\alpha(G)) + \lambda_2(A_\alpha(\overline{G})) \geq (n-1)\alpha.$$

Teorema 3.11 (CLM20)

Seja G um grafo de ordem $n \geq 2$. Então

$$\lambda_2(A_\alpha(G)) + \lambda_2(A_\alpha(\overline{G})) \geq n\alpha - 1,$$

com igualdade se, e somente se, $G \in \{K_n, K_{1,n-1}\}$.

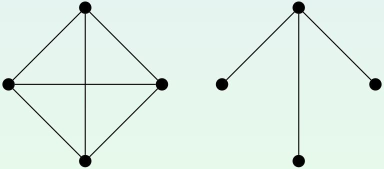

Figura: Grafos K_4 e $K_{1,3}$.

Teorema 3.12 (CLM20)

Sejam G e $\overline{G}$ conexos de ordem $n \geq 2$. Então

$$\lambda_2(A_\alpha(G)) + \lambda_2(A_\alpha(\overline{G})) < (2n-4)\alpha.$$

Teorema 3.13 (CLM20)

Sejam G um grafo conexo de ordem $n \geq 4$ e $\overline{G}$ desconexo. Então

$$\lambda_2(A_\alpha(G)) + \lambda_2(A_\alpha(\overline{G})) < (2n-3)\alpha - 1.$$

- Cotas para $\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G})$

Teorema 3.14

Seja G um grafo de ordem n e sejam θ_1 e θ_2 funções dadas em termos da ordem e/ou outro invariante de G. Então as seguintes inequações são equivalentes:

1. $\theta_1 \leq \mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq \theta_2$;
2. $2n - \theta_2 \leq \mu_{n-1}(G) + \mu_{n-1}(\overline{G}) \leq 2n - \theta_1$;
3. $\theta_1 - n \leq \mu_1(G) - \mu_{n-1}(G) \leq \theta_2 - n$;
4. $\theta_1 - n \leq \mu_1(\overline{G}) - \mu_{n-1}(\overline{G}) \leq \theta_2 - n$.

Demonstração: Basta utilizar as seguintes relações entre os autovalores de G e $\overline{G}$, $\mu_1(G) = n - \mu_{n-1}(\overline{G})$ e $\mu_1(\overline{G}) = n - \mu_{n-1}(G)$ e reescrever as inequações.

A partir da conhecida relação $\mu_1(G) \leq 2\Delta$, a cota superior de Nordhaus-Gaddum mais simples foi apresentada primeiramente por Liu et al. [LLT04].

Teorema 3.15 (LLT04)

Seja G é um grafo de ordem n, com grau máximo Δ e grau mínimo δ. Então

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2\Delta + 2(n-1-\delta) = 2(n-1) + 2(\Delta - \delta).$$

Se G e $\overline{G}$ são conexos e não regulares, Shi [Sh07] apresentou um limite melhor do que o da desigualdade acima.

Teorema 3.16 (Sh07)

Sejam G e $\overline{G}$ conexos e não regulares com n vértices. Então

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2[n - 1 - \frac{2}{2n^2 - n}] + 2(\Delta - \delta).$$

Em 2012, You e Liu [YL12] apresentam um limite envolvendo apenas o número de vértices do grafo.

Teorema 3.17 (YL12)

Seja G um grafo de ordem n. Então

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2n.$$

Em 2011, Zhai *et al.* [ZSH11] apresentaram uma conjectura para o spread do laplaciano e que aparece como uma questão proposta por You e Liu [YL12] em 2012 em função do índice da matriz laplaciana.

Conjectura 3.2

Seja G um grafo de ordem n. Então

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2n - 1.$$

A igualdade é atingida se, e somente se, G ou $\overline{G}$ é isomorfo ao join de K_1 e um grafo desconexo de ordem $n-1$.

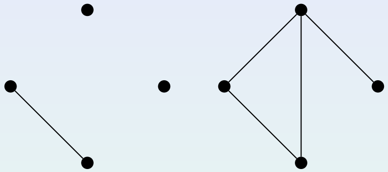

Figura: Grafos $K_1 \cup K_1 \cup K_2$ e $G \simeq K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$.

A Conjectura 3.2 já foi provada para árvores, grafos unicíclicos, bicíclicos, tricíclicos, grafos cactus, quase-árvores, grafos bipartidos, grafos desconexos, grafos com diâmetro diferente de 3, grafos quase-regulares e grafos livres de K_3.

Em 2016, Chen e Das [CD16] provaram a Conjecture 3.2 para grafos cuja a diferença entre o grau máximo e o grau mínimo não excede $\sqrt{n-3+\frac{2}{n}}$.

Teorema 3.18 (CD16)

Seja G um grafo de ordem $n \geq 5$, tal que $\Delta - \delta < \sqrt{n-3+\frac{2}{n}}$. Então

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2n - 1.$$

Em 2019, Grijó *et al.* [GLOPT19] provaram que a Conjectura 3.2 é satisfeita para grafos tal que $\Delta - \delta \leq \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) n - 1$, o que amplia o Teorema 3.18.

Teorema 3.19 (GLOPT19)

Seja G um grafo de ordem $n \geq 4$, tal que $\Delta - \delta \leq \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) n - 1$. Então

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2n - 1.$$

Demonstração: Aplicando o Teorema de Weyl's para $L(G)$ e $L(\overline{G})$, temos

$$\mu_1(G) \leq \Delta(G) + \lambda_1(-A(G)) = \Delta - \lambda_n(A(G))$$
$$\mu_1(\overline{G}) \leq \Delta(\overline{G}) + \lambda_1(-A(\overline{G})) = \overline{\Delta} - \lambda_n(A(\overline{G})).$$

Como $\lambda_n(G) = \lambda_n(A(G)) < 0$ para qualquer grafo,temos

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq n - 1 + (\Delta - \delta) + |\lambda_n(G)| + |\lambda_n(\overline{G})|.$$

Pelo Teorema 3.4 para $s = 1$ temos

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq n - 1 + (\Delta(G) - \delta(G)) + \frac{n}{\sqrt{2}} + 1 =$$

$$\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)n + (\Delta(G) - \delta(G)). \tag{3.1}$$

Como pela hipótese $\Delta(G) - \delta(G) \leq \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)n - 1$, o resultado segue.

Corolário 3.1 (GLOPT19)

Seja G um grafo regular de grau k com n vértices e não vazio. Então

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq 2n - 1.$$

Demonstração: Se $n = 2$ ou $n = 3$, então $G \simeq K_2$ ou $G \simeq K_3$ e nestes casos $\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) = n$. Seja $n \geq 4$. Neste caso $\Delta = \delta = k$ e pela Equação (3.1) temos

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) n \leq 2n - 1.$$

- Cotas para $\mu_1(G)\mu_1(\overline{G})$

  As relações de Nordhaus-Gaddum para o produto do índice do laplaciano de G e de seu complementar $\overline{G}$ são mais raras. Em 2014, Ashraf e Tayfeh-Rezaie [AT14] obtiveram uma cota para grafos bipartidos.

Teorema 3.20 (AT14)

Seja G um grafo bipartido com n vértices. Então

$$\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq n(n-1).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G ou $\overline{G}$ é $K_{1,n-1}$.

A partir do Teorema 3.20, Ashraf e Tayfeh-Rezaie [AT14] propuseram a Conjectura 3.3, que ainda permanece em aberto.

Conjectura 3.3 (AT14)

Seja G um grafo com n vértices. Então $\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq n(n-1)$. A igualdade ocorre se, e somente se, G ou $\overline{G}$ é isomorfo ao join de K_1 e um grafo desconexo de ordem $n-1$.

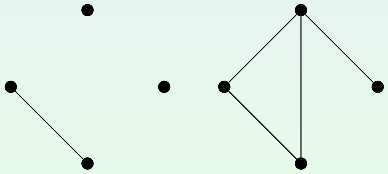

Figura: Grafos $K_1 \cup K_1 \cup K_2$ e $G \simeq K_1 \vee (K_1 \cup K_2)$.

Em 2019, Grijó *et al.* [GLOPT19] provaram que a Conjectura 3.3 é satisfeita para grafos regulares.

Teorema 3.21 (GLOPT19)

Seja G um grafo k-regular com n vértices. Então

$$\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq n(n-1).$$

Demonstração: Seja G um grafo k-regular. Se $n \leq 3$, o resultado segue imediatamente. Se $n \geq 4$, pelo Corolário 3.1

$$\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G}) \leq \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)n. \tag{3.2}$$

Como $\mu_1(G)$ e $\mu_1(\overline{G})$ são não negativos, podemos aplicar a desigualdade da média aritmética e geométrica ($\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$), obtendo

$$\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq \left(\frac{\mu_1(G) + \mu_1(\overline{G})}{2}\right)^2. \tag{3.3}$$

Utilizando a Inequação (3.2) em (3.3), temos

$$\mu_1(G)\mu_1(\overline{G}) \leq \left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}n\right)^2 = \left(\frac{3+2\sqrt{2}}{8}\right)n^2.$$

É fácil ver que $\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{8}\right)n^2 \leq n(n-1)$ para $n \geq 4$ e o resultado segue.

- Cotas para $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G})$

Em 2019, Grijó *et al.* [GLOPT19] também apresentaram as primeiras cotas inferiores e superiores para $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G})$.

Teorema 3.22 (GLOPT19)

Seja G um grafo com $n \geq 2$ vértices. Então,

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \geq n.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, G ou $\overline{G}$ são isomorfos a um dos seguintes grafos: K_n, $K_n - e$, $K_{1,n-1}$, $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$, $K_{n-1} + e$, $K_1 \vee 2K_{\frac{n-1}{2}}$, $\overline{K_{\frac{n}{3}}} \vee 2K_{\frac{n}{3}}$ or $\mathcal{G}(r, \frac{n}{2} - r)$, to $1 \leq r < \frac{n}{2}$.

Teorema 3.23 (GLOPT19)

Seja G um grafo com n vértices. Então

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 1.$$

Teorema 3.24 (GLOPT19)

Seja G um grafo desconexo com n vértices. Então,

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

A igualdade ocorrre se, e somente se, $G \cong 2K_1 \cup H$, onde $\overline{H}$ é um grafo desconexo de ordem $n-2$ vértices com no mínimo 3 componentes conexas.

Teorema 3.25 (GLOPT19)

Seja G um grafo com n vértices. Se $d(G) \neq 2$ e $d(\overline{G}) \neq 2$, então

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

A próxima proposição mostra que a desigualdade $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2$ é satisfeita para grafo bipartido e também para grafos regulares.

Proposição 3.1 (GLOPT19)

1. *Seja G um grafo bipartido com n vértices. Então*

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

2. *Seja G um grafo $k-$regular com n vértices. Então,*

$$\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2.$$

A partir desses resultados Grijó *et al.* [GLOPT19] propuseram a seguinte conjectura.

Conjectura 3.4 (GLOPT19)

Seja G um grafo com $n \geq 2$ vértices. Então, $\mu_2(G) + \mu_2(\overline{G}) \leq 2n - 2$. A igualdade ocorre se, e somente se, G ou $\overline{G}$ é isomorfo a $K_2 \vee H$, onde H é um grafo desconexo com $n-2$ vértices e tem no mínimo 3 três componentes conexas.

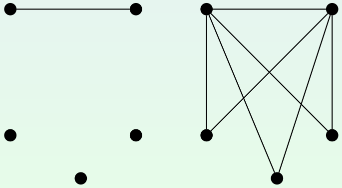

Figura: Grafos $K_2 \cup 3K_1$ e $G \simeq K_2 \vee 3K_1$.

Referências

[AAMM18] AFSHARI, B., AKBARI, S., MOGHADDAMZADEH, M., E MOHAR, B. The algebraic connectivity of a graph and its complement. Linear Algebra and its Applications 555 (2018), 157-162.

[AK72] AMIN, A., E HAKIMI, S. Upper bounds on the order of a clique of a graph. SIAM Journal on Applied Mathematics 22, 4 (1972), 569-573.

[AM85] ANDERSON JR, W. N., E MORLEY, T. D. Eigenvalues of the laplacian of a graph. Linear and multilinear algebra 18, 2 (1985), 141-145.

[AH13] AOUCHICHE, M., E HANSEN, P. A survey of nordhaus-gaddum type relations. Discrete Applied Mathematics 161, 4-5 (2013), 466-546.

[AT14] ASHRAF, F., E TAYFEH-REZAIE, B. Nordhaus Gaddum type inequalities for laplacian and signless laplacian eigenvalues. The Eletronic Journal of Combinatorics 21(3), (2014), P3.6.

[CD16] CHEN, X., E DAS, K. C. Some results on the laplacian spread of a graph. Linear Algebra and its Applications 505 (2016), 245-260.

[CLM20] CHEN, Y., LI, D., MENG, J., Nordhaus Gaddum type inequalities of the second $A_\alpha-$eigenvalue of a graph. Linear Algebra and its Applications 602, (2020), 57-72.

[GKMZ09] GUTMAN, I., KIANI, D., MIRZAKHAH, M., E ZHOU, B. On incidence energy of a graph. Linear Algebra and its Applications 431, 8 (2009), 1223-1233.

[GLOPT19] GRIJÓ, R., LIMA, L., OLIVEIRA, C., PORTO, G., TREVISAN, V., Nordhaus-Gaddum type inequalities for the two largest laplacian eigenvalues, Discrete Applied Mathematics 267 (2019), 176-183.

[HL19] HUANG, X.Y., LIN H.Q., Signless Laplacian eigenvalue problems of Nordhaus-Gaddum-type, Linear Algebra Appl. 581 (2019) 336-353.

[LLT04] LIU, H., LU, M., E TIAN, F. On the laplacian spectral radius of a graph. Linear algebra and its applications 376 (2004), 135-141.

[Ni07] NIKIFOROV, V. Eigenvalue problems of nordhaus-gaddum type. Discrete Mathematics 307, 6 (2007), 774-780.

[Ni15] NIKIFOROV, V. Extrema of graph eigenvalues. Linear Algebra and its Applications 482 (2015), 158-190.

[NY14]] NIKIFOROV, V., E YUAN, X. More eigenvalue problems of nordhaus-gaddum type. Linear Algebra and its Applications 451 (2014), 231-245.

[NG56] NORDHAUS, E. . A., E GADDUM, J. W. On complementary graphs. The American Mathematical Monthly 63, 3 (1956), 175-177.

[No70] NOSAL, E. Eigenvalues of graphs. Tese de mestrado. University of Calgary, Calgary, Alberta, Canada (1970).

[Te11] TERPAI, T. Proof of a conjecture of V. Nikiforov. Combinatorica 31, 6 (2011), 739-754.

[Sh07] SHI, L. Bounds on the (laplacian) spectral radius of graphs. Linear algebra and its applications 422, 2-3 (2007), 755-770.

[YL12] YOU, Z., E LIU, B. The laplacian spread of graphs. Czechoslovak mathematical journal 62, 1 (2012), 155-168.

[ZSH11] ZHAI, M., SHU, J., E HONG, Y. On the laplacian spread of graphs. Applied Mathematics Letters 24, 12 (2011), 2097-2101.

Obrigada!!

Carla Oliveira
carla.oliveira@ibge.gov.br